第26卷 第5期　　工　程　数　学　学　报　　Vol. 26 No. 5
2009年10月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0855-06

两不同部件并联可修系统稳态可靠度的最优控制*

贾　诺[1,2]，　王　涛[1,2]，　金鸿章[1]

(1- 哈尔滨工程大学自动化学院，哈尔滨　150001;　2- 哈尔滨师范大学数学科学学院，哈尔滨　150025)

摘　要: 本文针对修复时间服从任意分布的两不同部件并联可修系统的模型，将系统稳态可靠度的最优控制问题转化为求指标泛函在Banach空间上的极值问题，并通过证明指标泛函在Banach空间中的序列弱紧集上下半弱连续给出了最优控制元的存在性。

关键词: 可修复系统；下半弱连续；最优控制

分类号: AMS(2000) 34D35　　**中图分类号**: O177.92; O175.13　　**文献标识码**: A

1　引言

随着生产的发展和现代技术的不断进步，系统规模越来越庞大，结构、设备(硬件、软件)越来越复杂，产品的这些特性降低了系统的可靠性。为了改善系统性能，提高系统可靠度，越来越多的国内外学者进行了可靠性理论的研究。本文考虑的并联可修复系统是可靠性理论中的一类重要系统，一直以来都受到学者的普遍关注。文献[1]中作者运用增补变量的方法建立并描述了两不同部件并联可修系统的模型，在

1) 此模型存在唯一的非负解 $p(x,t)$；

2) 极限 $\lim\limits_{t\to\infty} p(x,t)=p(x)$ 存在

的假设条件下研究了此模型的稳态解，其中

$$p(x,t)=\big(p_0(t),p_1(t),p_2(t),p_3(x,t),p_4(x,t)\big),\quad p(x)=\big(p_0,p_1,p_2,p_3(x),p_4(x)\big),$$

并得到了系统的可靠度和可用度等可靠性指标。文献[2]的作者运用算子半群方法，讨论了文[1]模型的适定性与稳定性问题，证明了文[1]模型确定了一个正 C_0 压缩半群，从而系统存在唯一的非负动态解，并进一步得到系统的稳定性，即证明假设1)、2)都是合理的。本文将在文献[2]结论的基础上，将系统稳态可靠度的最优控制问题转化为求指标泛函在Banach空间上的极值问题，并通过证明指标泛函在Banach空间中的序列弱紧集上下半弱连续给出了最优控制元的存在性。由于系统维护维修的费用与可靠度有关，因此对稳态可靠度的最优控制的研究有助于以后的系统效益分析，结果具有物理意义和实际意义。

2　模型描述

我们将两不同部件并联可修复系统分为如下五种状态:

状态0　两并联部件正常工作;

收稿日期: 2008-04-07.　**作者简介**: 贾诺(1978年11月生)，女，讲师. 研究方向：系统分析与控制；系统可靠性

***基金项目**: 国家自然科学基金(50575048).

状态 1 部件 A 故障，部件 B 正常工作；

状态 2 部件 B 故障，部件 A 正常工作；

状态 3 两部件均故障，系统故障；

状态 4 由于常规故障导致的系统故障，

其中常规故障是指由于设备设计上的缺陷、人为操作因素、系统运行或维护错误以及外部环境恶劣等原因引起系统中的两个或多个部件失效，并假设

1) 系统的两部件互不相同；
2) 各种故障均为统计独立；
3) 一个部件故障另一个正常工作或两部件均完好时都会发生常规故障；
4) 两部件全部故障时系统故障；
5) 系统故障后的修复时间服从任意分布；
6) 常规故障率、其他故障率和部件修复率均为常数；
7) 修复后的部件及系统完好如初。

于是系统的模型可用积分一微分方程组描述为：

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-(\lambda_{\mathrm{A}}+\lambda_{\mathrm{B}}+\lambda_{c_1})p_0(t)+\mu_{\mathrm{A}}p_1(t)+\mu_{\mathrm{B}}p_2(t)+\sum_{i=3}^{4}\int_0^\infty p_i(x,t)\mu_i(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_1(t)}{\mathrm{d}t}=-(\mu_{\mathrm{A}}+\lambda_{c_3}+\lambda_{\mathrm{B}})p_1(t)+\lambda_{\mathrm{A}}p_0(t), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_2(t)}{\mathrm{d}t}=-(\mu_{\mathrm{B}}+\lambda_{\mathrm{A}}+\lambda_{c_2})p_2(t)+\lambda_{\mathrm{B}}p_0(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_i(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial p_i(x,t)}{\partial t}=-\mu_i(x)p_i(x,t),\quad i=3,4, \tag{4}$$

$$p_3(0,t)=\lambda_{\mathrm{B}}p_1(t)+\lambda_{\mathrm{A}}p_2(t), \tag{5}$$

$$p_4(0,t)=\lambda_{c_1}p_0(t)+\lambda_{c_3}p_1(t)+\lambda_{c_2}p_2(t), \tag{6}$$

$$p_0(0)=1,\quad p_1(0)=p_2(0)=p_i(x,0)=0,\quad i=3,4, \tag{7}$$

其中 $(x,t)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$，$p_k(t)$ 表示 t 时刻系统处于状态 k 的概率 $(k=0,1,2)$；$p_i(x,t)$ 表示 t 时刻故障系统处于状态 i 的关于维修时间 x 的概率密度 $(i=3,4)$；λ_{A} 表示部件 A 的故障率，λ_{B} 表示部件 B 的故障率，λ_{c_1} 表示两部件功能正常时的常规故障率，λ_{c_2} 表示部件 B 故障但部件 A 功能正常时的常规故障率，λ_{c_3} 表示部件 A 故障但部件 B 功能正常时的常规故障率；μ_{A} 表示部件 A 的修复率，μ_{B} 表示部件 B 的修复率，$\mu_i(x)$ 表示故障系统处于状态 i 且修复时间为 x 的修复率 $(i=3,4)$，且满足

$$0<\mu_i(x)<\infty,\quad M=\sup_{x\in[0,\infty)}\mu_i(x),\quad \int_0^\infty\mu_i(x)\mathrm{d}x=\infty,\quad i=3,4,$$

将 $p_k(t), p_i(x,t), \mu_i(x)$ $(k=0,1,2,\ i=3,4)$ 在负实轴上进行光滑零延拓，仍以原函数符号记之，这意味着系统不坏不修，并记

$$\mathrm{A}_0=\lambda_{\mathrm{A}}+\lambda_{\mathrm{B}}+\lambda_{c_1},\quad \mathrm{A}_1=\mu_{\mathrm{A}}+\lambda_{c_3}+\lambda_{\mathrm{B}},\quad \mathrm{A}_2=\mu_{\mathrm{B}}+\lambda_{\mathrm{A}}+\lambda_{c_2}.$$

3 稳态可靠度的最优控制

可靠度是可修产品重要的可靠性指标之一。在工程应用中特别令人感兴趣的是稳态可靠度。以前研究人员往往是在对故障率和修复率赋以常数值的情况下利用计算机画出图像来研究系统的可靠度。例如，在我们考虑的系统中，称 $p_0(t)$ 为部件在时刻 t 的瞬时可靠度，

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} p_0(t)$$

为部件的稳态可靠度。假设系统不坏不修，在文 [2] 的条件下，设所有修复率为常值，即 $\mu_{\mathrm{A}} = \mu_{\mathrm{B}} = \mu_i(x) = \mu > 0$，$i = 3, 4$，则 $p_0(t)$ 关于 t 是单调递减函数，且

$$p_0 = \frac{\mu}{a_0 + \mu}$$

为系统的稳态可靠度。于是可选择 μ，使得 p_0 达到给定的预期概率。

下面考虑修复率 $\mu_i(x)$，$i = 3, 4$ 为维修时间 x 的函数时，以 $\mu(x) = (\mu_3(x), \mu_4(x))$ 为控制元，系统稳态可靠度在 $[0, T]$ $(\forall\, T > 0)$ 内某时刻达到给定预期概率 $\bar{p}_0 \in R$ 的最优控制问题。

引理 1 在文 [2] 的条件下，系统存在唯一的非负解 $P(x,t)$ 满足 $\|P(\cdot,t)\| \le 1$，$t \in [0, \infty)$。设 $P(x)$ 是相应于 0 本征值的正本征向量，且满足 $\|P(x)\| = 1$，$Q = (1, 1, 1, 1(x), 1(x))$，则系统的动态解依范数收敛于稳态解，即

$$\lim_{t\to\infty} P(x,t) = \langle P_0, Q\rangle P(x) = P(x) = (p_0,\, p_1,\, p_2,\, p_3(x),\, p_4(x)),$$

其中 P_0 为系统的初值。

于是系统稳态解满足下面方程

$$-\mathrm{A}_0 p_0 + \mu_{\mathrm{A}} p_1 + \mu_{\mathrm{B}} p_2 + \sum_{i=3}^{4} \int_0^{\infty} p_i(x)\mu_i(x)\mathrm{d}x = 0, \tag{8}$$

$$-\mathrm{A}_1 p_1 + \lambda_{\mathrm{A}} p_0 = 0, \tag{9}$$

$$-\mathrm{A}_2 p_2 + \lambda_{\mathrm{B}} p_0 = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i(x)}{\mathrm{d}x} = -\mu_i(x) p_i(x), \quad i = 3, 4, \tag{11}$$

$$p_3(0) = \lambda_{\mathrm{B}} p_1 + \lambda_{\mathrm{A}} p_2, \tag{12}$$

$$p_4(0) = \lambda_{c_1} p_0 + \lambda_{c_3} p_1 + \lambda_{c_2} p_2, \tag{13}$$

取指标泛函

$$J(\mu(x)) = |\, p_0(\mu(x)) - \bar{p}_0 \,|^2,$$

其中 $p_0(\mu(x))$ 是系统对应于 $\mu(x)$ 的稳态解的零状态。记容许控制集为

$$U = \{\mu(x) = (\mu_3(x), \mu_4(x)) \in L^\infty[0,T] \times L^\infty[0,T] \mid 0 \le \mu_i(x) \le M < \infty,\ i = 3, 4\},$$

则 U 为 $L^\infty[0,T] \times L^\infty[0,T]$ 中的闭凸集。于是需要寻找 $\mu^*(x) \in U$，使得

$$J(\mu^*(x)) = \inf_{\mu(x)\in U} J(\mu(x)), \tag{14}$$

为了求解问题(14)，令

$$W = \Big\{p_0 \in \mathbf{R} \mid \exists\, \mu(x) \in U,\ 使得\ P(x) = (p_0, p_1, p_2, p_3(x), p_4(x)) \in \mathbf{R}^3 \times L^2[0,T] \times L^2[0,T]$$

$$是方程组对应于\ \mu(x)\ 的稳态解，且满足\ \sum_{k=0}^{2} p_k(\mu(x)) + \sum_{i=3}^{4}\int_0^\infty p_i(x)\mathrm{d}x = 1\Big\},$$

重新定义指标泛函 $\tilde{J}$ 为 $\tilde{J}(p_0) = |p_0(\mu(x)) - \bar{p}_0|^2$，则可修复系统的最优控制问题等价于寻求 $\mu^*(x) \in U$，使 $p_0^* \in W$ 满足

$$\tilde{J}(p_0^*) = \inf_{p_0 \in W} \tilde{J}(p_0),$$

$\mu^*(x)$ 称为系统的最优控制元。

定理1 W 是 $\mathbf{R}$ 上的有界闭集。

证明 由引理1知 W 有界。下面证明 W 是闭集。任取 $p_0^{(n)} \in W$，由 W 的定义可知存在 $\mu^{(n)}(x) \in U$，使得 $P^{(n)}(x)$ 为方程组与之对应的稳态解。由于 $L^\infty[0,T] \times L^\infty[0,T]$ 中的有界集 U 是弱*闭的，因此由 $\{\mu^{(n)}(x)\}$ 有界知必存在一个 U 中弱*收敛的子列(不妨设为其本身) $\mu^{(n)}(x) \xrightarrow{w^*} \tilde{\mu}(x)$，则 $\tilde{\mu}(x) \in U$。

若 $p_0^{(n)}$ 依范数收敛于 $\tilde{p}_0$，即 $p_0^{(n)} \to \tilde{p}_0$，将(8)-(11)整理得

$$p_1^{(n)} = \frac{\lambda_{\mathrm{A}}}{\mathrm{A}_1} p_0^{(n)}, \quad p_2^{(n)} = \frac{\lambda_{\mathrm{B}}}{\mathrm{A}_2} p_0^{(n)},$$

$$p_3^{(n)}(x) = \lambda_{\mathrm{A}}\lambda_{\mathrm{B}}\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\Big) p_0^{(n)} \mathrm{e}^{-\int_0^x \mu_3^{(n)}(\xi)\mathrm{d}\xi},$$

$$p_4^{(n)}(x) = \Big(\lambda_{c_1} + \frac{\lambda_{c_3}\lambda_{\mathrm{A}}}{\mathrm{A}_1} + \frac{\lambda_{c_2}\lambda_{\mathrm{B}}}{\mathrm{A}_2}\Big) p_0^{(n)} \mathrm{e}^{-\int_0^x \mu_4^{(n)}(\xi)\mathrm{d}\xi},$$

$$-\mathrm{A}_0 p_0^{(n)} + \mu_{\mathrm{A}} p_1^{(n)} + \mu_{\mathrm{B}} p_2^{(n)} + \sum_{i=3}^{4}\int_0^\infty p_i^{(n)}(x)\mu_i^{(n)}(x)\mathrm{d}x = 0.$$

由 $L^2[0,T]$ 的自反性，则

$$p_1^{(n)} \to \tilde{p}_1, \quad p_2^{(n)} \to \tilde{p}_2, \quad \tilde{p}_1 = \frac{\lambda_{\mathrm{A}}}{\mathrm{A}_1}\tilde{p}_0, \quad \tilde{p}_2 = \frac{\lambda_{\mathrm{B}}}{\mathrm{A}_2}\tilde{p}_0.$$

又由

$$\lambda_{\mathrm{A}}\lambda_{\mathrm{B}}\Big(\frac{1}{\mathrm{A}_1} + \frac{1}{\mathrm{A}_2}\Big) p_0^{(n)} \mathrm{e}^{-\int_0^x \mu_3^{(n)}(\xi)\mathrm{d}\xi} \xrightarrow{w} \lambda_{\mathrm{A}}\lambda_{\mathrm{B}}\Big(\frac{1}{\mathrm{A}_1} + \frac{1}{\mathrm{A}_2}\Big)\tilde{p}_0 \mathrm{e}^{-\int_0^x \tilde{\mu}_3(\xi)\mathrm{d}\xi},$$

$$\Big(\lambda_{c_1} + \frac{\lambda_{c_3}\lambda_{\mathrm{A}}}{\mathrm{A}_1} + \frac{\lambda_{c_2}\lambda_{\mathrm{B}}}{\mathrm{A}_2}\Big) p_0^{(n)} \mathrm{e}^{-\int_0^x \mu_4^{(n)}(\xi)\mathrm{d}\xi} \xrightarrow{w} \Big(\lambda_{c_1} + \frac{\lambda_{c_3}\lambda_{\mathrm{A}}}{\mathrm{A}_1} + \frac{\lambda_{c_2}\lambda_{\mathrm{B}}}{\mathrm{A}_2}\Big)\tilde{p}_0 \mathrm{e}^{-\int_0^x \tilde{\mu}_4(\xi)\mathrm{d}\xi},$$

得

$$p_i^{(n)}(x) \xrightarrow{w} \tilde{p}_i(x), \quad i = 3, 4,$$

$$\tilde{p}_3(x) = \lambda_{\mathrm{A}}\lambda_{\mathrm{B}}\Big(\frac{1}{\mathrm{A}_1} + \frac{1}{\mathrm{A}_2}\Big)\tilde{p}_0 \mathrm{e}^{-\int_0^x \tilde{\mu}_3(\xi)\mathrm{d}\xi},$$

$$\tilde{p}_4(x) = \Big(\lambda_{c_1} + \frac{\lambda_{c_3}\lambda_{\mathrm{A}}}{\mathrm{A}_1} + \frac{\lambda_{c_2}\lambda_{\mathrm{B}}}{\mathrm{A}_2}\Big)\tilde{p}_0 \mathrm{e}^{-\int_0^x \tilde{\mu}_4(\xi)\mathrm{d}\xi}.$$

根据 Banach-Saks-Mazur 定理，存在 $\{p_i^{(n)}(x)\}$ 中的凸组合列，使其强收敛于 $\tilde{p}_i(x)$，从而存在 $\{p_i^{(n+j)}(x)\}$ $(j=0,1,2,\cdots)$ 的一个有限凸组合

$$q_i^{(n)}(x)=\sum_k \alpha_k^{(n)} p_{i,n_k}^{(n)},$$

使得 $q_i^{(n)}(x)$ 强收敛于 $\tilde{p}_i(x)$，$i=3,4$。于是存在 $p_l^{(n)}$，$l=0,1,2$ 的有限凸组合

$$q_l^{(n)}=\sum_k \alpha_k^{(n)} p_{l,n_k}^{(n)},$$

使得 $q_l^{(n)}\to\tilde{p}_l$，$l=0,1,2$。故存在 $\tilde{\mu}_i^{(n)}(x)$，使得

$$-\mathrm{A}_0 q_0^{(n)}+\mu_{\mathrm{A}} q_1^{(n)}+\mu_{\mathrm{B}} q_2^{(n)}+\sum_{i=3}^{4}\int_0^{\infty} q_i^{(n)}(x)\tilde{\mu}_i^{(n)}(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_0^{\infty} q_i^{(n)}(x)\tilde{\mu}_i^{(n)}(x)\mathrm{d}x\xrightarrow{w}\int_0^{\infty}\tilde{p}_i(x)\tilde{\mu}_i(x)\mathrm{d}x,$$

于是

$$-\mathrm{A}_0\tilde{p}_0+\mu_{\mathrm{A}}\tilde{p}_1+\mu_{\mathrm{B}}\tilde{p}_2+\sum_{i=3}^{4}\int_0^{\infty}\tilde{p}_i(x)\tilde{\mu}_i(x)\mathrm{d}x=0.$$

综上，$\tilde{P}(x)=(\tilde{p}_0,\tilde{p}_1,\tilde{p}_2,\tilde{p}_3(x),\tilde{p}_4(x))$ 是对应于 $\tilde{\mu}(x)=(\tilde{\mu}_3(x),\tilde{\mu}_4(x))$ 的稳态解。再由约束条件

$$\sum_{k=0}^{2}p_k(\mu(x))+\sum_{i=3}^{4}\int_0^{\infty}p_i(x)\mathrm{d}x=1,$$

知 $\tilde{p}_0\in W$，W 是闭集。

定理 2 $\tilde{J}(p_0)$ 是 W 上的严格凸泛函。

证明 对于任意的 $p_0^{(1)}$，$p_0^{(2)}\in W$，$0<\tau<1$，$p_0^{(1)}\neq p_0^{(2)}$ 有

$$\begin{aligned}\tilde{J}\big(\tau p_0^{(1)}+(1-\tau)p_0^{(2)}\big) &= \big|\tau p_0^{(1)}+(1-\tau)p_0^{(2)}-\bar{p}_0\big|^2\\ &< \tau\big|p_0^{(1)}-\bar{p}_0\big|^2+(1-\tau)\big|p_0^{(2)}-\bar{p}_0\big|^2\\ &= \tau\tilde{J}\big(p_0^{(1)}\big)+(1-\tau)\tilde{J}\big(p_0^{(2)}\big),\end{aligned}$$

故 $\tilde{J}(p_0)$ 是 W 上的严格凸泛函。

引理 2[8] 设 f 是 X 上的连续泛函，并且是凸的，即当 $t\in[0,1]$, $x,y\in X$ 时，$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)$，则 f 是下半弱连续的。

引理 3[8] 设 U 是自反 Banach 空间 X 中的有界弱闭集，f 是 U 上的下半弱连续泛函，则存在 $x_0\in U$，使得

$$f(x_0)=\inf_{x\in U}f(x).$$

定理 3 存在唯一的 $p_0^*\in W$，使得

$$\tilde{J}(p_0^*)=\inf_{p_0\in W}\tilde{J}(p_0).$$

证明　由定理1、定理2及引理2、引理3知，存在唯一的$p_0^* \in W$，使得

$$\tilde{J}(p_0^*) = \inf_{p_0 \in W} \tilde{J}(p_0).$$

定理4　存在$\mu^*(x) \in U$，使得

$$J(\mu^*(x)) = \inf_{\mu(x) \in U} J(\mu(x)).$$

4　结论

并联可修系统出现在工业、军事和日常生活中，系统的可靠性对于各种条件下的任务来说都极其重要。鉴于可靠度是表征系统可靠性的重要指标之一，本文考虑了两不同部件并联可修系统稳态可靠度的最优控制问题，通过证明指标泛函在Banach空间的序列弱紧集上下半弱连续，给出最优控制元的存在性，为以后系统的优化进行了理论铺垫。

参考文献：

[1] Dhillon B S, Anuded O C. Common-cause failure analysis of a non-idential unit parallel system with arbitrarily distributed repair times[J]. Microelectron Reliability, 1993, 33(1): 87-103

[2] 郭卫华，许跟起，徐厚宝. 两不同部件并联可修系统解的稳定性[J]. 应用泛函分析学报，2003, 5(3): 281-288

[3] 郭卫华，叶留青，徐厚宝等. 附有选择性服务与无等待能力的$M/G/1$排队系统稳定性分析[J]. 工程数学学报，2006, 23(5): 821-826

[4] 高德智，许香敏. 森林发展系统中的最优控制问题[J]. 系统工程理论与实践，1999, 19(4): 90-93

[5] Yosida K. Functional Analysis[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1965

[6] 曹晋华，程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京：高等教育出版社，2006, 7

[7] 刘仁彬，唐应辉，曹保山. N部件串联可修系统的一个新模型及其可靠性分析[J]. 工程数学学报，2008, 25(3): 421-428

[8] 钟承奎等. 非线性泛函分析引论(修订版)[M]. 兰州：兰州大学出版社，2004, 6

Optimal Control for Steady-state Reliability of a Parallel Repairable System with Two Non-identical Units

JIA Nuo[1,2], WANG Tao[1,2], JIN Hong-zhang[1]

(1- College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001;
2- College of Mathematics Science, Harbin Normal University, Harbin 150025)

Abstract: We consider a parallel repairable system with two non-identical units and arbitrarily distributed repair times. The existence of the optimal control is established by transferring the optimal control problem on the arrival to the expected probability for steady-state reliability into a minimum problem, whose the index functional is proved to be weakly lower semi-continuous on the weakly compact sequence sets in Banach space.

Keywords: repairable system; weakly lower semi-continuous; optimal control